# MATEMATICA - LEZIONE 20

venerdì 10 novembre 2023 10:51

## Derivate

- $\frac{d}{dx} c = 0 \quad \forall c \in \mathbb{R}$
- $\frac{d}{dx} x = 1$
- $\frac{d}{dx} x^{\alpha} = \alpha x^{\alpha-1}$
- $\frac{d}{dx} \sqrt{x} = \frac{1}{2\sqrt{x}}$
- $\frac{d}{dx} e^{x} = e^{x}$
- $\frac{d}{dx} a^{x} = a^{x} \log a$
- $\frac{d}{dx} \log x = \frac{1}{x}$
- $\frac{d}{dx} \log_a x = \frac{1}{x \log a}$
- $\frac{d}{dx} \sin x = \cos x$
- $\frac{d}{dx} \cos x = -\sin x$
- $\frac{d}{dx} \tan x = \frac{1}{\cos^2 x} = 1 + \tan^2 x$
- $\frac{d}{dx} \arctan x = \frac{1}{1+x^2}$
- $\frac{d}{dx} \arcsin x = \frac{1}{\sqrt{1-x^2}}$
- $\frac{d}{dx} \arccos x = -\frac{1}{\sqrt{1-x^2}}$

## Regole per il calcolo delle derivate

1) $\left(f(x) + g(x)\right)' = f'(x) + g'(x)$
2) $\left(f(x) - g(x)\right)' = f'(x) - g'(x)$
3) $\left(c\, f(x)\right)' = c\, f'(x)$
4) $\left(f(x)\, g(x)\right)' = f'(x)\, g(x) + f(x)\, g'(x)$
5) $\left(\frac{f(x)}{g(x)}\right)' = \frac{f'(x)\, g(x) - f(x)\, g'(x)}{g(x)^2}$
6) $\left(\frac{1}{g(x)}\right)' = -\frac{g'(x)}{g(x)^2}$
7) $\left(g(f(x))\right)' = g'(f(x))\, f'(x)$
8) $\left(f^{-1}\right)'(f(x)) = \frac{1}{f'(x)}$

ESEMPI

1) $f(x) = \arctan x \cdot x^4$

$$f'(x) = \frac{1}{1+x^2} \cdot x^4 + \arctan x \cdot 4x^3$$

2) $f(x) = \tan(\sin x)$

$$f'(x) = \left(1 + \tan^2(\sin x)\right) \cdot (\sin x)'$$
$$= \left(1 + \tan^2(\sin x)\right) \cos x$$

3) $f(x) = \arcsin(e^x)$

$$f'(x) = \frac{1}{\sqrt{1-(e^x)^2}} \cdot (e^x)' = \frac{e^x}{\sqrt{1-e^{2x}}}$$

4) $f(x) = \dfrac{x}{\sqrt{1+3e^{2x}}}$

$$f'(x) = \frac{1 \cdot \sqrt{1+3e^{2x}} - x\left(\sqrt{1+3e^{2x}}\right)'}{1+3e^{2x}}$$

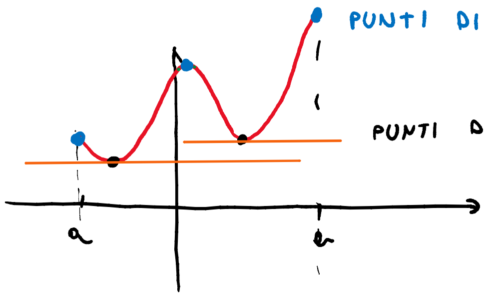
$$= \frac{\sqrt{1+3e^{2x}} - x \dfrac{1}{2\sqrt{1+3e^{2x}}} \cdot \left(1+3e^{2x}\right)'}{1+3e^{2x}}$$

$$= \frac{\sqrt{1+3e^{2x}} - \dfrac{x}{\cancel{2}\sqrt{1+3e^{2x}}}\, 3e^{2x} \cdot \cancel{2}}{1+3e^{2x}}$$

$$= \frac{1+3e^{2x} - 3x\,e^{2x}}{\sqrt{1+3e^{2x}}\left(1+3e^{2x}\right)}$$

## Teoremi sulle derivate :

1) Teorema di Fermat. Nelle scorse lezioni abbiamo introdotto i punti di max / min locale.




Nei punti di max/min locale interni ad $(a, b)$ (esclusi gli estremi) la retta tangente al grafico di $f$ (se esiste) è orizzontale.

TEOREMA DI FERMAT

Siano $a, b \in \mathbb{R}^*$ con $a < b$. Sia $f: (a, b) \longrightarrow \mathbb{R}$ una funzione e sia $x_0 \in (a, b)$ un punto di massimo o di minimo locale per $f$ in $(a, b)$. Se $f$ è derivabile in $x_0$, allora $f'(x_0) = 0$.

DIM.

Supponiamo $x_0$ punto di minimo locale in $(a, b)$. Allora $\exists\, r > 0$ t.c. $f(x) \geq f(x_0)$ $\forall x \in (x_0 - r, x_0 + r) \subseteq (a, b)$. Per ipotesi $f$ è derivabile in $x_0$ quindi

$$\exists\ f'(x_0) = \lim_{x \to x_0} \frac{f(x) - f(x_0)}{x - x_0} = \lim_{x \to x_0^+} \frac{f(x) - f(x_0)}{x - x_0} = \lim_{x \to x_0^-} \frac{f(x) - f(x_0)}{x - x_0}$$

Se $x \in (x_0, x_0 + r)$, allora $\dfrac{\overbrace{f(x) - f(x_0)}^{\geq 0}}{\underbrace{x - x_0}_{> 0}} \geq 0$ quindi per il corollario del teorema della permanenza del segno si ha

$$f'(x_0) = \lim_{x \to x_0^+} \frac{f(x) - f(x_0)}{x - x_0} \geq 0.$$

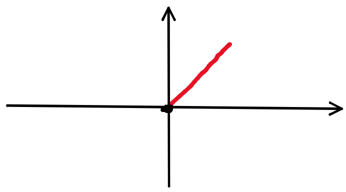
In modo simile, se $x \in (x_0 - r, x_0)$ si ha che $\dfrac{\overbrace{f(x) - f(x_0)}^{\geq 0}}{\underbrace{x - x_0}_{< 0}} \leq 0$.

Quindi $f'(x_0) = \lim_{x \to x_0^-} \dfrac{f(x) - f(x_0)}{x - x_0} \leq 0$.

Allora $f'(x_0) \geq 0$ e $f'(x_0) \leq 0$ quindi $f'(x_0) = 0$. ◻

OSS Il teorema non vale negli intervalli chiusi $[a, b]$. Infatti se una funzione ha un punto di max/min in $a$ o in $b$ non $f'$ si annulli in quel punto.

$f(x) = x$ in $[0,1]$

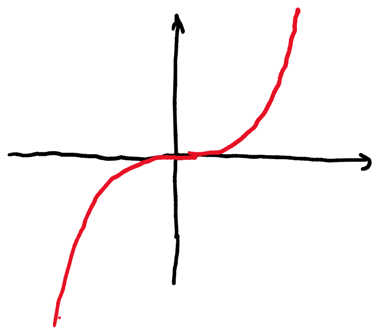


$0$ è un punto di min locale in $[0,1]$

$1$ è un punto di max locale in $[0,1]$

Ma $f'(x) = 1 \ \forall x \in [0,1]$ quindi $f'$ non è $0$ in $0$ e in $1$

OSS 2 Il teorema dice che se $x_0$ è punto di max/min allora $f'(x_0) = 0$. Possono esistere punti in cui $f'(x_0) = 0$ che non sono né max né min (questi punti si dicono punti di FLESSO ORIZZONTALE.



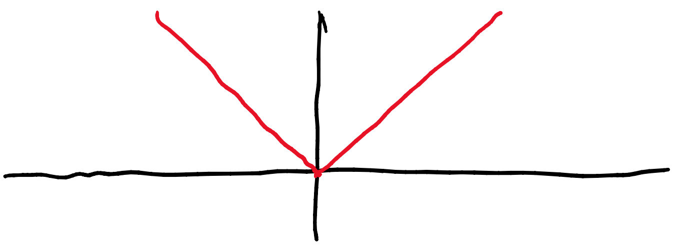
$f: \mathbb{R} \to \mathbb{R}$, $f(x) = x^3$

$f'(x) = 3x^2$ quindi $f'(0) = 0$

ma $0$ non è un punto di max né di min locale.

OSS Il teorema richiede la derivabilità in $x_0$ ma ci sono funzioni che hanno punti di max/min locale in punti in cui non sono derivabili.

$f(x) = |x|$

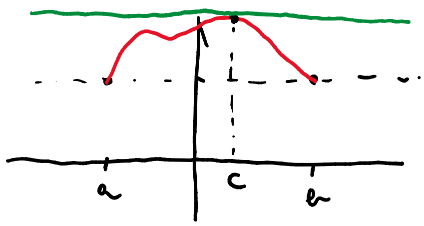


$0$ è un punto di min assoluto (e locale) ma $f$ non è derivabile in $0$.

Ricapitolando: Sia $I$ un intervallo e $f: I \to \mathbb{R}$. Allora, i punti di max/min locale possono essere:

1) negli estremi di $I$
2) punti interni all'intervallo in cui $f$ è derivabile e $f' = 0$.
3) punti di non derivabilità per $f$.

## TEOREMA DI ROLLE :




Cioè c'è un punto in cui la retta tangente è orizzontale

Siano $a, b \in \mathbb{R}$, $a < b$. Sia $f : [a,b] \to \mathbb{R}$ una funzione tale che:

1) $f$ è continua in $[a, b]$
2) $f$ è derivabile in $(a, b)$
3) $f(a) = f(b)$.

Allora $\exists\, c \in (a, b)$ tale che $f'(c) = 0$.

**DIM**

Siccome $f$ è continua in $[a, b]$, per il teo. di Weierstrass $\exists\, x_1, x_2 \in [a, b]$ tali che $f(x_1) = \min_{[a,b]} f$ e $f(x_2) = \max_{[a,b]} f$

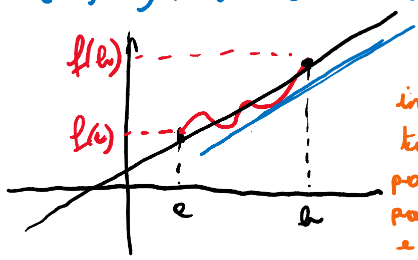
Ci sono due possibilità

1) $f(x_1) = f(x_2)$
In questo caso $f$ è costante quindi $f'(x) = 0 \;\; \forall x \in (a, b)$.
Si sceglie $c$ come un qualsiasi punto di $(a, b)$.

2) $f(x_1) \neq f(x_2)$.
siccome $f(a) = f(b)$, allora almeno uno tra $x_1$ e $x_2$ appartiene ad $(a, b)$. Per il teorema di Fermat in questo punto $f'$ vale $0$. $\square$

## TEOREMA DI LAGRANGE .

Siano $a, b \in \mathbb{R}$, $a < b$. Sia $f : [a, b] \to \mathbb{R}$ una funzione continua in $[a, b]$ e derivabile in $(a, b)$. Allora $\exists\, c \in (a, b)$ tale che $f'(c) = \dfrac{f(b) - f(a)}{b - a}$




C'è un punto in cui la retta tangente è parallela a quella passante per $(a, f(a))$ e $(b, f(b))$.

**DIM**

Sia $g(x) = f(x) - \left( \dfrac{f(b) - f(a)}{b - a} (x - a) + f(a) \right)$

$g$ è continua in $[a, b]$ e derivabile in $(a, b)$ per i teoremi sulle operazioni tra funzioni continue / derivabili.

Inoltre $g(a) = f(a) - (0 + f(a)) = 0$ e

$$g(b) = f(b) - \left( \frac{f(b)-f(a)}{\cancel{b-a}} \cancel{(b-a)} + f(a) \right)$$

$$= f(b) - \left( f(b) - \cancel{f(a)} + \cancel{f(a)} \right) = 0$$

Per il teorema di Rolle $\exists\, c \in (a,b)$ t.c. $g'(c) = 0$.

Ma $g'(x) = f'(x) - \dfrac{f(b)-f(a)}{b-a}$

Quindi $0 = g'(c) = f'(c) - \dfrac{f(b)-f(a)}{b-a} \Rightarrow f'(c) = \dfrac{f(b)-f(a)}{b-a}$ $\square$.

TEOREMA (CRITERIO DI MONOTONIA)

Sia $I \subseteq \mathbb{R}$ un intervallo e sia $f: I \longrightarrow \mathbb{R}$ derivabile in $I$.
Allora valgono le seguenti affermazioni:

1) $f$ è monotona crescente in $I \Leftrightarrow f'(x) \geq 0 \quad \forall x \in I$.
2) $f$ è monotona decrescente in $I \Leftrightarrow f'(x) \leq 0 \quad \forall x \in I$.
3) Se $f'(x) > 0$ in $I$, allora $f$ è strett. monotona crescente in $I$
4) Se $f'(x) < 0$ in $I$, allora $f$ è strett. monotona decrescente in $I$.

Dunque il segno di $f'$ ci dice dove $f$ cresce e dove decresce.

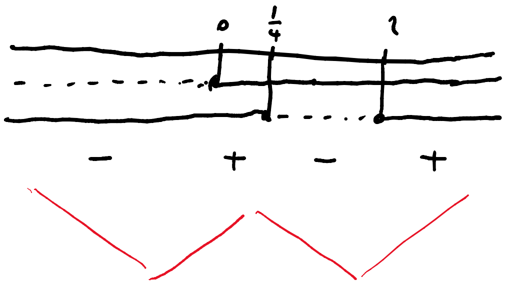
ESEMPIO

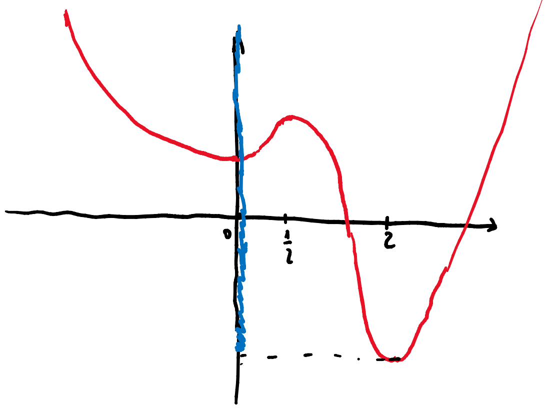
$f(x) = x^4 - 3x^3 + x^2 + 1$

- $\mathrm{Dom}(f) = \mathbb{R}$.
- $\lim_{x \to +\infty} f(x) = +\infty$
- $\lim_{x \to -\infty} f(x) = +\infty$
- $f'(x) = 4x^3 - 9x^2 + 2x$
  $= x\,(\underbrace{4x^2 - 9x + 2}_{})$

$\Delta = 81 - 32 = 49 \qquad x_{1,2} = \dfrac{9 \pm 7}{8} \begin{cases} 2 \\ \frac{1}{4} \end{cases}$

Segno di $f'$:




$f(0) = 1$

$f(\frac{1}{4}) > 1$

$f(2) = 16 - 24 + 4 + 1 = -3$

Domanda: Qual è l'immagine di $f$?

$f(\mathbb{R}) = [-3, +\infty)$.

IDEA DELLA DIM DEL CRITERIO DI MONOTONIA:

1) Se $f$ è monotona crescente, allora $\forall x, y \in I$ con $x < y$ si ha $f(x) \leq f(y)$.

$$f'(x) = \lim_{y \to x} \frac{f(y) - f(x)}{y - x} = \lim_{y \to x^+} \frac{f(y) - f(x)}{y - x} \geq 0.$$

Viceversa se $f' > 0$ in $I$, allora per il teorema di Lagrange $\forall x, y \in I$ con $x < y$ $\exists\, c \in (x, y)$ t.c. $f'(c) = \frac{f(x) - f(y)}{x - y} = \frac{f(y) - f(x)}{y - x}$

Quindi $f(y) - f(x) = \underbrace{f'(c)}_{\geq 0} \underbrace{(y - x)}_{> 0} \geq 0 \implies f(y) \geq f(x)$. $\square$.

ESERCIZIO

Disegnare il grafico di $f(x) = \frac{x}{1+x^2}$

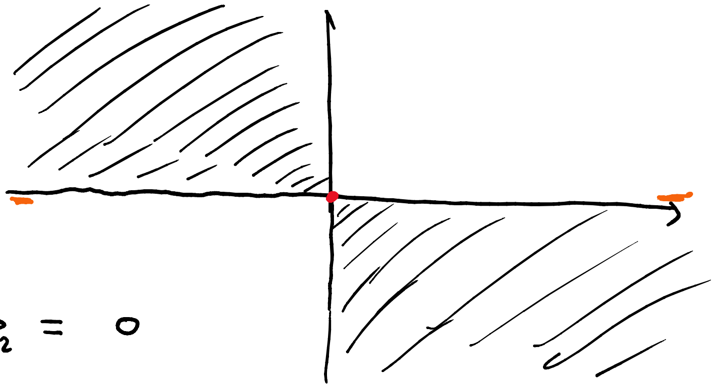
- $Dom(f) = \mathbb{R}$.
- $f$ è dispari:

$$f(-x) = \frac{-x}{1+(-x)^2} = \frac{-x}{1+x^2} = -\frac{x}{1+x^2} = -f(x)$$

- Segno della funzione:

$\frac{x}{1+x^2} \geq 0 \iff x \geq 0$ (perché $1 + x^2 > 0$ $\forall x \in \mathbb{R}$).

$f \geq 0$ in $[0, +\infty)$
$f < 0$ in $(-\infty, 0]$



· Limiti:

$$\lim_{x \to +\infty} f(x) = \lim_{x \to +\infty} \frac{x}{1+x^2} = 0$$

$$\lim_{x \to -\infty} f(x) = \lim_{x \to -\infty} \frac{x}{1+x^2} = 0$$

La retta $y = 0$ è un asintoto orizzontale per $x \to +\infty$ e per $x \to -\infty$.

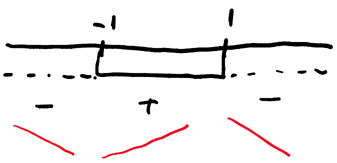
Derivata:

$$f'(x) = \left(\frac{x}{1+x^2}\right)' = \frac{1 \cdot (1+x^2) - x \cdot 2x}{(1+x^2)^2} = \frac{1+x^2-2x^2}{(1+x^2)^2}$$

$$= \frac{1-x^2}{(1+x^2)^2}$$

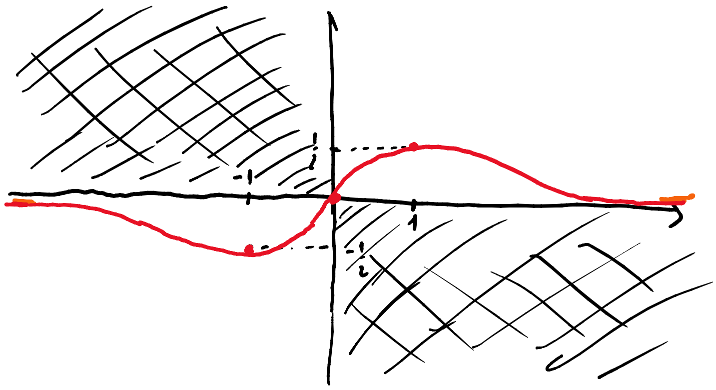
Segno di $f'$:

$$\frac{1-x^2}{(1+x^2)^2} \geq 0 \iff 1-x^2 \geq 0 \iff -1 \leq x \leq 1$$



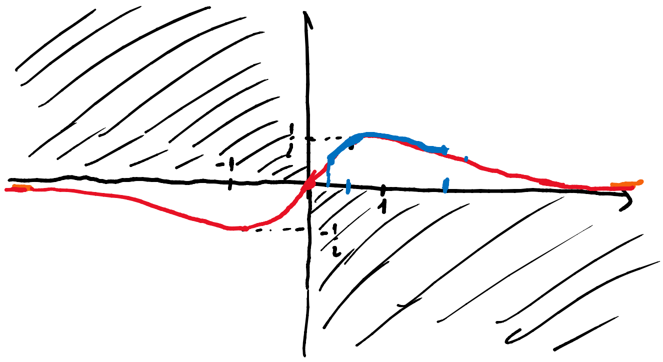

Notiamo che $f'(1) = f'(-1) = 0$
$-1$ è punto di min locale
$1$ è punto di max locale.

Inoltre $f(1) = \frac{1}{1+1} = \frac{1}{2}$ e $f(-1) = -\frac{1}{2}$




Domanda: Qual è l'immagine di $f$?

$f(\mathbb{R}) = [-\frac{1}{2}, \frac{1}{2}]$



<u>Domanda 2</u> :

Calcolare $\max\limits_{[\frac{1}{4}, 2]} f$ e $\min\limits_{[\frac{1}{4}, 2]} f$

Sicuramente $\max\limits_{[\frac{1}{2}, 2]} = f(1) = \frac{1}{2}$

$$f\left(\frac{1}{4}\right) = \frac{\frac{1}{4}}{1+\frac{1}{16}} = \frac{\frac{1}{4}}{\frac{17}{16}} = \frac{1}{4} \cdot \frac{16}{17} = \frac{4}{17}$$

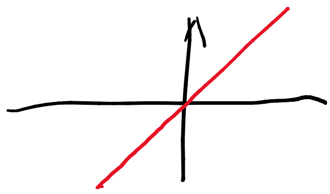
$$f(2) = \frac{2}{1+4} = \frac{2}{5}$$

$$\min_{[\frac{1}{4}, 2]} f = \frac{4}{17}$$

---

Il segno della derivata di una funzione permette di capire dove la funzione cresce e dove decresce. Non sempre questo è sufficiente per disegnare accuratamente il grafico

- $f_1(x) = x$ , $f'(x) = 1$



- $f_2(x) = x + \frac{1}{2} \operatorname{sen} x$ $\quad f'(x) = 1 + \frac{1}{2} \cos x > 0$

$f_2$ è crescente ma ha infiniti cambi di convessità.